Physik.

Bestimmung der elastischen Konstanten optischer Gläser aus der Lichtbeugung an Ultraschallwellen

---

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
bei der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Schlesischen Friedrich - Wilhelms - Universität
zu Breslau

vorgelegt von

Hans Joachim Goehlich

aus Breslau.

Breslau 1938

Breslauer Genossenschafts-Buchdruckerei, e. G. m. b. H., Breslau 1, Ursulinerstraße 1

Referent: Prof. Dr. Bergmann.
Korreferent: Prof. Dr. Schaefer.
Examen rigorosum: 27. Januar 1937.

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau.

Meinen Eltern in Dankbarkeit gewidmet.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderdruck aus „GLASTECHNISCHE BERICHTE", 15. Jg. 1937, H. 12, S. 447—461.
Im Selbstverlag: Deutsche Glastechnische Gesellschaft E. V., Frankfurt (Main) 17, Gutleutstraße 91.

DK 534.321.9 : 539.3 : 666.11 (042)

Bestimmung der elastischen Konstanten optischer Gläser aus der Lichtbeugung an Ultraschallwellen.

Von Cl. Schaefer, L. Bergmann und H. J. Goehlich.

[Vortrag bei der 20. Glastechnischen Tagung, Berlin, 21. Januar 1937. — Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Breslau.]

Die früheren Verfahren zur Bestimmung der elastischen Konstanten werden kurz besprochen. Es wird ein neues Verfahren angegeben, das auf der Beugung des Lichtes an Ultraschallwellen beruht. Die Ausmessung der Lichtbeugungsfiguren hochfrequent schwingender Glaswürfel erlaubt eine rasche Bestimmung sämtlicher elastischer Konstanten des Glases aus einer einzigen Aufnahme. Das Verfahren wird an 42 optischen Gläsern durchgeführt und seine Genauigkeit erörtert.

1. Einleitung und Problemstellung.

Elastische Messungen an Glas, als einem der wichtigsten wirklich isotropen Stoffe, wurden bereits um die Mitte des vorigen Jahrhunderts ausgeführt, z. B. von Wertheim und Chevandier[1]), später von Voigt[2]) u. v. a.[3]). Mehr als einen ungefähren Anhalt über das elastische Verhalten der Gläser können jedoch diese ersten Messungen nicht geben, da die elastischen Konstanten, meist überhaupt nur der Elastizitätsmodul, gewöhnlich nur an einigen wenigen Gläsern bestimmt wurden, von denen im übrigen weder ihr sonstiges physikalisches Verhalten, noch ihre chemische Zusammensetzung bekannt waren. Das Interesse an den technischen Eigenschaften der Gläser, wie Zug-, Druck- und Schlagfestigkeit, Härte, thermische Widerstandsfähigkeit, mit denen die elastischen Konstanten in innigem Zusammenhang stehen, führte schließlich zu einer systematischen Untersuchung des Elastizitätsmoduls E durch Winkelmann und Schott[4]) an 16 Jenaer Gläsern. Zur Messung diente — bis auf wenige weiter unten zu besprechende Ausnahmen — die von A. König[5]) angegebene Biegungsmethode, bei der ein an den Enden gelagerter Stab in der Mitte belastet und die dadurch hervorgerufene Durchbiegung mit Hilfe einer Spiegelablesung bestimmt wird. Die gemessenen Werte schwanken von Glas zu Glas recht beträchtlich; es lag daher nahe, nach einem zahlenmäßigen Zusammenhang mit der chemischen Zusammensetzung zu suchen. Es kann sich dabei selbstverständlich nicht um eine exakte molekulare Theorie handeln, schon deshalb nicht, weil die innere Konstitution der Gläser — selbst heute — noch nicht genügend geklärt ist. Was Winkelmann und Schott angeben, ist vielmehr ein für technische Zwecke brauchbares Rechenverfahren, das man wohl am besten mit „Interpolation" bezeichnen kann. Winkelmann und Schott setzen die zu bestimmende Eigenschaft (das Verfahren hatte sich bereits zur Berechnung anderer physikalischer Eigenschaften bewährt) als lineare homogene Funktion der Komponenten an, also etwa

$$X = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n \quad ,$$

wo X der gesuchte Zahlwert der Eigenschaft, p_i die prozentualen Anteile der n Glaskomponenten, a_i für jeden Glasbildner charakteristische Konstanten sind. Kennt man nun für eine Anzahl Gläser die X-Werte, so kann man nach der Methode der kleinsten Quadrate die Koeffizienten a_1 bis a_n so bestimmen, daß der obige Zusammenhang für die Gläser möglichst gut erfüllt ist. Diese Koeffizienten gestatten dann ihrerseits, für weitere Gläser bekannter Zusammensetzung das unbekannte X vorauszuberechnen. Wie man leicht erkennt, muß das Verfahren bei extrem zusammengesetzten Gläsern versagen, da es sich dann um eine „Extrapolation" handelt. Ferner zeigt sich bei der Anwendung des Verfahrens auf den Elastizitätsmodul deutlich, daß diese Eigenschaft sich im Grunde genommen nicht als lineare homogene Funktion der Bestandteile darstellen läßt. Auch bei günstigster Wahl der Koeffizienten a_i ist die obige Beziehung teilweise so schlecht erfüllt, daß sich Winkelmann[6]) später zu dem Ausweg entschloß, die

[1]) Wertheim u. Chevandier, Compt. rend., **20** (1845), S. 1637.
[2]) W. Voigt, Wied. Ann., **15** (1882), S. 497.
[3]) Eine Uebersicht über die ältere Literatur bei Winkelmann u. Schott, Wied. Ann., **51** (1894), S. 697, und in Glastechn. Ber., **1** (1923/24), S. 129 f.
[4]) A. a. O.
[5]) A. König, Wied. Ann., **28** (1886), S. 108.
[6]) A. Winkelmann, Wied. Ann., **61** (1897), S. 105.

Gläser nach ihrer Zusammensetzung in drei Gruppen zu teilen und für jede Gruppe ein besonderes System von Koeffizienten aufzustellen. Auch dann gehen die Abweichungen von vorausberechnetem zu gemessenem Elastizitätsmodul noch bis 8%.

Diese Arbeit erfuhr nach zwei Richtungen hin Ergänzungen; einmal bestimmte Winkelmann[6]), und zwar i. w. mit der gleichen Apparatur, an denselben Gläsern die Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls, und zweitens ermittelte R. Straubel[7]) den Querkontraktionskoeffizienten σ (Poissonsche Konstante) für die von Winkelmann und Schott untersuchten Gläser, so daß sich nunmehr deren sämtliche elastischen Daten berechnen ließen. Er beobachtete nach dem Vorgange von Cornu[8]) die sattelförmige Verwölbung einer gebogenen Platte in einer Interferometeranordnung. Die Interferenzkurven gleicher Dicke sind Hyperbeln, aus deren Asymptotenwinkel sich σ in einfacher Weise berechnet. Auch Straubel hat versucht, σ analog E aus den Bestandteilen zu berechnen, überzeugte sich aber schließlich aus zwei entscheidenden Gründen von der Undurchführbarkeit, erstens nämlich, weil auf Grund der mathematischen Eigenschaften des Verfahrens eine geringe Unsicherheit der σ-Werte bereits eine große Unsicherheit der Koeffizienten $a_1 \ldots a_n$ zur Folge hat, und zweitens, weil sich alle diese Koeffizienten von Grund auf ändern können, sobald man weitere, möglicherweise extrem zusammengesetzte Gläser zu deren Berechnung heranzieht. Es ist in diesem Zusammenhang interessant, daß Clarke und Turner[9]) sowie Fetterolf und Parmelee[10]), die systematische E-Bestimmungen nach der Biegemethode an Ca-Na-Si- bzw. Ba-Na-Si- und Zn-Na-Si-Gläsern gemacht haben, Koeffizienten errechneten, die sich z. T. um ein Vielfaches von den Winkelmann- und Schottschen unterscheiden. Gehlhoff und Thomas[11]) schlugen daher einen anderen Weg ein: Sie bestimmten die Aenderung von E, wenn in dem untersuchten Glase 1% SiO_2 durch 1% eines anderen Glasbildners G ersetzt wird. Der gefundene Wert hängt außer von der Art des Glasbildners noch davon ab, wieviel Prozent G ursprünglich schon vorhanden waren. Man stellt also eine Tabelle auf, die für jeden ursprünglichen Gehalt an G (es genügt eine Einteilung von 5 zu 5 Prozent) die Aenderung von G bei dem oben beschriebenen Austausch angibt. Indem Gehlhoff und Thomas derartige Tabellen für alle wichtigen Glasbildner aufstellten, konnten sie, von einem Grundglase mit bekanntem E ausgehend, durch sukzessives Ersetzen den Elastizitätsmodul eines vorgegebenen Glases berechnen.

Eine große Zahl von Arbeiten befaßt sich mit gewissen Spezialfragen. Z. B. behandeln E. Wandersleb[12]) und G. Schulze[13]) die Temperaturabhängigkeit von E, die schon Winkelmann untersucht hatte; Weidmann[14]), Phillips[15]), Jessop[16]), Borchard[17]) untersuchen die sehr wichtige Frage der elastischen Nachwirkung, die vielfach schon in den oben erwähnten Arbeiten eine gewisse Rolle spielt.

Eine Uebersicht über die gesamte, auch ältere, Literatur findet sich in den „Glastechnischen Tabellen“[18]). Hier sind auch, wie in dem Buche „Glas“ von Thiene[19]), die bisherigen Ergebnisse zusammengestellt. Man erkennt hier, daß verschiedene E-Bestimmungen an gleichem Glas häufig größere Differenzen untereinander zeigen.

Die vorstehenden Elastizitäts-Bestimmungen beruhen mit Ausnahme einiger weniger Messungen, bei denen Winkelmann nach dem Kundtschen Staubfiguren-Verfahren die Schallgeschwindigkeit in Glasstäben und daraus E bestimmte, auf rein statischen Beobachtungen. Ihnen stehen die dynamischen Messungsmethoden gegenüber, die vor den statischen den prinzipiellen Vorzug haben, frei von allen Störungen durch Nachwirkung zu sein. Das erwähnte Kundtsche Verfahren gehört hierher, das auch in moderner Form (elektrostatischer oder piezoelektrischer Anregung der Schwingungen) gelegentlich zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Glasstäben benutzt wurde[20]). In jüngster Zeit hat die Entdeckung von Debye und Sears[21]) sowie von Lucas und Biquard[22]), daß sich hochfrequente Schallwellen gegen Licht wie ein beugendes Gitter verhalten, zur Entwicklung mehrerer neuer dynamischer Methoden geführt. Bär und Walti[23]) lassen eine in Xylol laufende Ultraschallwelle auf

[7]) R. Straubel, Wied. Ann., **68** (1899), S. 369.
[8]) A. Cornu, Compt. rend., **69** (1869), S. 333.
[9]) J. R. Clarke u. W. E. S. Turner, J. Soc. Glass Technol., **3** (1919), S. 260.
[10]) L. D. Fetterolf u. C. W. Parmelee, J. Amer. Ceram. Soc., **12** (1929), S. 193. (Ref. Glastechn. Ber., **8** (1930), S. 417.)
[11]) G. Gehlhoff u. M. Thomas, Z. techn. Phys., **7** (1926), S. 105. (Ref. Glastechn. Ber., **4** (1926/27), S. 103—105.)
[12]) E. Wandersleb, Ann. d. Phys., (4), **8** (1902), S. 367.
[13]) G. Schulze, Z. f. Phys., **69** (1931), S. 456.
[14]) G. Weidmann, Wied. Ann., **29** (1886), S. 214.
[15]) P. Phillips, Phil. Mag., (6), **9** (1905), S. 513.
[16]) H. T. Jessop, Phil. Mag., (6), **42** (1921), S. 551.
[17]) K. H. Borchard, Sprechsaal Keramik usw., **67** (1934), S. 297. (Ref. Glastechn. Ber., **13** (1935), S. 22.)
[18]) W. Eitel, M. Pirani u. K. Scheel, Glastechn. Tabellen, Berlin 1932, Verlag J. Springer. (Bespr. Glastechn. Ber., **10** (1932), S. 514—519.)
[19]) H. Thiene, Glas, Jena 1931, Verlag G. Fischer. (Bespr. Glastechn. Ber., **9** (1931), S. 376.)
[20]) Z. B. K. Röhrich, Z. f. Phys., **73** (1932), S. 813.
[21]) P. Debye u. F. W. Sears, Proc. Nat. Acad. Amer., **18** (1932), S. 410.
[22]) R. Lucas u. P. Biquard, J. Phys. et le Radium, **3** (1932), S. 464.
[23]) R. Bär u. E. Walti, Helv. Physica Acta, **7** (1934), S. 658.

einen flachen Glaskeil treffen. Es entsteht dann bei senkrechtem Einfall im Glas eine Kompressionswelle, deren Wellenlänge man dadurch ermitteln kann, daß man bestimmt, bei welcher Keildicke maximale Durchlässigkeit für die Welle in der Flüssigkeit eintritt. Bei schrägem Einfall bildet sich im Glas außerdem eine Scherungswelle aus, deren Wellenlänge in ähnlicher Weise bestimmt werden kann, sofern man nur durch hinreichend schrägen Einfall dafür sorgt, daß die Kompressionswelle im Glas totalreflektiert und damit unwirksam gemacht wird. Aus den beiden Wellenlängen und der Schallfrequenz lassen sich E, σ, mithin alle elastischen Konstanten des Glaskeiles berechnen. Ein ähnliches Verfahren gibt Bez-Bardili[24]) an. Er läßt einen aus einer Flüssigkeit kommenden Ultraschallstrahl unter verschiedenen Winkeln an der Vorder- und Rückseite einer Glasplatte reflektieren, und es gelingt ihm in einer Reihe von Versuchen, den Totalreflexionswinkel für die Kompressions- und die Scherungswelle zu ermitteln, aus denen wieder E, σ, usw. folgen. Zum Nachweis des Ultraschallstrahls dient in beiden Fällen das Beugungsspektrum, das auftritt, sobald Licht durch das Schallwellengitter fällt. Im Gegensatz dazu haben Hiedemann, Asbach und Hoesch[25]) die stehende Schallwelle selbst beobachtet und aus der Länge der longitudinalen und der transversalen Welle elastische Konstanten von Glas bestimmen können. Schaefer und Bergmann[26]) haben Kristalle und Gläser zu hochfrequenten Schwingungen angeregt und bei der Durchstrahlung mit parallelem Licht Laue-Diagrammen ähnliche Figuren erhalten, aus denen sich auf Grund einer von Fues und Ludloff[27]) gegebenen Theorie sämtliche elastischen Konstanten der untersuchten Körper errechnen ließen.

Im folgenden wird nun dieses Verfahren auf Gläser, d. h. auf den Spezialfall des isotropen Körpers mit zwei unabhängigen elastischen Konstanten angewendet. Es soll mit seiner Hilfe Querkontraktion σ, Torsionsmodul μ, und damit auch der Elastizitätsmodul E einer größeren Anzahl optischer Jenaer Gläser bestimmt werden, für die zum weitaus größten Teile noch keinerlei Messungen vorliegen. Das Verfahren unterscheidet sich von allen bisherigen dadurch, daß es bereits in einer einzigen Messung ein in sich konsistentes System der elastischen Konstanten liefert. Es zeigt sich, daß diese Bestimmung außerordentlich rasch und mit einer Genauigkeit durchführbar ist, die der anderer Methoden nicht nachsteht. Außerdem ist man auch hier wieder, wie bei allen dynamischen Verfahren, frei von allen Nachwirkungsstörungen.

[24]) W. Bez-Bardili, Z. f. Phys., **96** (1935), S. 761.

[25]) E. Hiedemann, H. R. Asbach u. K. H. Hoesch, Z. f. Phys., **90** (1934), S. 322; Naturw., **23** (1935), S. 577.

[26]) Cl. Schaefer u. L. Bergmann, Sitz.-Ber. Berl. Akad., 1934, S. 192; 1935, S. 222; Naturw., **22** (1934), S. 685; **23** (1935), S. 799.

[27]) E. Fues u. H. Ludloff, Sitz.-Ber. Berl. Akad., 1935, S. 225.

2. Grundlagen und Theorie des Verfahrens.

Das Prinzip der Schaefer-Bergmannschen Anordnung ist kurz das folgende. In dem zu untersuchenden quaderförmigen Körper werden durch eine aufgekittete piezoelektrische Quarzplatte Eigenschwingungen hoher Frequenz erzeugt. Es entsteht im Medium ein kompliziertes System elastischer Wellen und damit eine räumlich periodische Dichteänderung. Fällt nun ein paralleles Lichtbündel durch das Medium, so wird es an diesem „Raumgitter" elastischer Wellen nach wohldefinierten Interferenzrichtungen hin gebeugt, so daß bei seiner Vereinigung im Brennpunkt einer Linse eine charakteristische Interferenzfigur entsteht, die sich experimentell als unabhängig von der äußeren Gestalt des Körpers, von dessen Orientierung zum Lichtstrahl dagegen im allgemeinen als abhängig erweist. Es ist nach dem Obigen ferner verständlich, daß die Figur in engstem Zusammenhang mit den elastischen Konstanten des untersuchten Mediums stehen muß.

Eine Theorie, die diesen Zusammenhang aufklären will, hat demnach zwei Probleme zu behandeln, nämlich erstens die Frage der Dichteverteilung, d. h. der Form der elastischen Eigenschwingung im Medium, und zweitens den Zusammenhang der Interferenzfigur mit dieser Dichteverteilung. Für die Entstehung der Eigenschwingung des angeregten Körpers hat man sich etwa folgende Vorstellung zu machen. Sobald die Frequenz $\omega = 2\pi\nu$ der dem Piezoquarz aufgedrückten Wechselspannung in Resonanz mit einer seiner Eigenschwingungen kommt, wird nicht nur der Quarz selbst, sondern auch der aufgekittete Körper zunächst in der Anregungsrichtung zu kräftigen mechanischen Schwingungen angestoßen. Infolge eines noch nicht näher untersuchten Koppelungseffektes — roh gesprochen also der Querkontraktion — wird nun diese Schwingungsenergie auch auf die anderen Richtungen verteilt, so daß sich schließlich der oben erwähnte komplizierte Schwingungszustand ausbildet. Denkt man sich diesen Schwingungszustand aufgebaut als Ueberlagerung der ebenen Wellen jeder Fortpflanzungsrichtung, die zu der Frequenz ω gehören, so wird jede dieser Wellen mit einer charakteristischen Intensität vertreten sein, die von den Randbedingungen des Körpers und der anregenden Frequenz abhängt. Nun ist aber leicht einzusehen, daß die Intensität der Wellen, d. h. der Dichteänderungen, zwar die Intensität des gebeugten Lichtes, nicht aber den Beugungswinkel beeinflussen kann. Der Beugungswinkel, also auch die Form der Interferenzfigur wird vielmehr ausschließlich durch die Wellenlänge der in den einzelnen Richtungen sich ausbildenden elastischen Wellen bestimmt (Gitterkonstante). Es ergibt sich

dies auch aus der genaueren theoretischen Ueberlegung mit dem Vorbehalt wenigstens, daß die Abmessungen des untersuchten Körpers groß sind gegen die elastische Wellenlänge, eine Bedingung, die bei allen folgenden Versuchen stets erfüllt ist. Theoretisch bedeutet dieses Freiwerden von den Randbedingungen überhaupt erst die Möglichkeit, das Problem allgemein zu lösen[28]). Man braucht nunmehr nur nach der Gesamtheit aller fortschreitenden ebenen Wellen zu fragen, die bei der Frequenz ω in einem Medium ohne Rand, d. h. einem unendlich ausgedehnten elastischen Medium, entstehen können.

Zur Beantwortung dieser Frage hat man von der allgemeinen Schwingungsgleichung eines elastischen Mediums auszugehen, einer partiellen Differentialgleichung für den elastischen Verzerrungsvektor $\mathfrak{s}$. In diese Gleichung gehen als Konstante außer der Dichte ϱ des Mediums noch dessen elastische Daten, im Falle des allgemeinsten anisotropen Körpers (triklines System) 21 Größen, ein. Benutzt man gemäß den obigen Ueberlegungen als Lösungsansatz ebene Wellen, so liefert die Rechnung schließlich eine Beziehung zwischen deren Wellenlänge und der Ausbreitungsrichtung, derart, daß bei einer bestimmten Frequenz zu jeder vorgegebenen Ausbreitungsrichtung im elastischen Medium 3 Wellen mit im allgemeinen verschiedener Wellenlänge Λ', Λ'', Λ''', also auch verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit gehören. Diese fundamentale Beziehung ist wegen ihres engen Zusammenhanges mit der Gestalt der Interferenzkurven von Fues und Ludloff (a. a. O.) „Form-Frequenz-Beziehung" genannt worden. Sie erlaubt auch eine geometrische Veranschaulichung, indem man sich im Raum in jeder Ausbreitungsrichtung $\mathfrak{n}$ (Einheitsvektor in Richtung der Wellennormale) den zugehörigen „Ausbreitungsvektor" $\mathfrak{k}$

$$[1] \qquad \mathfrak{k} = \frac{2\pi}{\Lambda}\,\mathfrak{n} \qquad\qquad k = \left|\mathfrak{k}\right| = \frac{2\pi}{\Lambda}$$

der Wellen aufgetragen denkt. Die Spitze des Vektors $\mathfrak{k}$ liegt dann auf einer Fläche, der „Form-Frequenz-Fläche", die im allgemeinen aus 3 Mänteln besteht, da ja zu jeder Ausbreitungsrichtung im allgemeinen 3 Wellen gehören. Aus dem mathematischen Bau der Form-Frequenz-Beziehung folgt, daß die Verzerrungsvektoren $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$, $\mathfrak{s}'''$ dreier zusammengehöriger Wellen paarweise aufeinander senkrecht stehen, so daß sie zusammen ein rechtwinkeliges Koordinatensystem bilden. Der Spezialfall, der beim isotropen Körper (Glas) auftritt, ist der, daß einer der Verzerrungsvektoren in die Fortpflanzungsrichtung fällt, eine Welle also eine reine Kompressionswelle ist; dann müssen die beiden anderen zur gleichen Ausbreitungsrichtung (Normalen $\mathfrak{n}$) gehörigen Wellen zwei aufeinander senkrechte reine Transversal-(Schub-)Wellen sein.

[28]) Cl. Schaefer u. L. Bergmann, Naturw., **22** (1934), S. 690.

Beim isotropen Körper, mit dem wir es in diesem Zusammenhang allein zu tun haben, wird die Durchführung der Rechnung, deren Gedankengang eben angedeutet wurde, besonders einfach, da sich die elastischen Konstanten hier allein auf zwei unabhängige, z. B. λ und μ, die sogenannten Lamé schen Konstanten reduzieren[29]). Die Gleichung der Form-Frequenz-Fläche lautet hier mit den oben benutzten Bezeichnungen

$$[2] \qquad \left[(\lambda + 2\mu)\,(\mathfrak{k}^2_x + \mathfrak{k}^2_y + \mathfrak{k}^2_z) - \varrho\,\omega^2\right] \cdot \left[\mu\,(\mathfrak{k}^2_x + \mathfrak{k}^2_y + \mathfrak{k}^2_z) - \varrho\omega^2\right]^2 = 0.$$

Die Form-Frequenz-Fläche zerfällt damit in drei Faktoren, die die Gleichungen

$$[3a] \text{ einmal} \qquad k^2 = \mathfrak{k}^2_x + \mathfrak{k}^2_y + \mathfrak{k}^2_z = \frac{\varrho\,\omega^2}{\lambda + 2\mu}$$

$$[3b] \text{ und zweimal} \qquad k^2 = \mathfrak{k}^2_x + \mathfrak{k}^2_y + \mathfrak{k}^2_z = \frac{\varrho\,\omega^2}{\mu}$$

ergeben.

Die Form-Frequenz-Fläche besteht somit aus zwei konzentrischen Kugelschalen, einer einfachen mit dem Radius

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\varrho}{\lambda + 2\mu}}$$

und einer doppelten mit dem Radius

$$k'' = k''' = \omega \sqrt{\frac{\varrho}{\mu}}\,.$$

Es ist dies die geometrische Veranschaulichung der bekannten Tatsache, daß in einem unendlich ausgedehnten isotropen Medium zwei Typen elastischer Wellen möglich sind, die sich (das ist ja gerade die Definition der Isotropie) nach allen Richtungen gleich schnell ausbreiten, nämlich mit den Geschwindigkeiten

$$v' = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} \quad \text{und}$$

$$v'' = v''' = \frac{\omega}{k''} = \frac{\omega}{k'''} = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

(mit Bezug auf die Definition des „Ausbreitungsvektors" $\mathfrak{k}$, s. Gl. [1]). Es läßt sich zeigen, daß v' einer reinen Kompressionswelle, $v'' = v'''$ den rein transversalen Wellen entspricht.

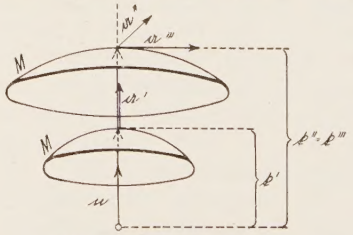

Bild 1.
Lage der Ausbreitungs- und Verzerrungsvektoren zur Form-Frequenz-Fläche.

Bild 1 soll die gegenseitige Lage der Vektoren $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}'' = \mathfrak{k}'''$ veranschaulichen. Mit $\mathfrak{a}'$ usw. ist der Amplitudenvektor der elastischen Welle ($= \mathfrak{s}_{max}$) bezeichnet. Die Endpunkte von $\mathfrak{k}'$ sowie $\mathfrak{k}'' = \mathfrak{k}'''$ liegen auf dem aus zwei Kugelschalen bestehenden Mantel M der Form-Frequenz-Fläche. Die Lage der transversalen Ver-

[29]) μ ist gleich dem Torsionsmodul; mit Elastizitätsmodul E und Querkontraktionskoeffizient σ stehen λ und μ in einfachem Zusammenhang (s. u.).

zerrungsvektoren a'' und a''' ist perspektivisch angedeutet.

Nachdem nunmehr durch die Form-Frequenz-Beziehung die Verteilung der Wellen im Medium gegeben ist, läßt sich die Frage nach der Gestalt der Interferenzfigur verhältnismäßig leicht beantworten. Die elastischen Wellen rufen, zunächst wenigstens, soweit sie eine longitudinale Komponente besitzen[30]), eine räumlich periodische Dichteverteilung hervor. Es bilden sich Schichten maximaler Dichte mit einem Abstand von einer elastischen Wellenlänge Λ. Die Beugung des primären Lichtstrahles, der z. B. in der z-Richtung einfallen möge (Bild 2), läßt sich nun auf-

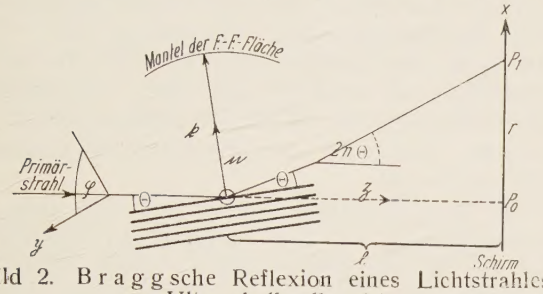

Bild 2. Braggsche Reflexion eines Lichtstrahles am Ultraschallwellengitter.

fassen als Braggsche Reflexion an diesen Ebenen maximaler Dichte unter dem Glanzwinkel Θ, der durch die Braggsche Beziehung bestimmt ist:

[4] $2\,\Lambda \sin\Theta = m\lambda_i$ oder genügend genau
$2\,\Lambda\,\Theta = m\lambda_i$

(λ_i ist die optische Wellenlänge innerhalb des Mediums; m die Ordnung des Beugungsbildes, praktisch meist m = 1.)

Für das Folgende entscheidend wichtig ist die experimentelle Tatsache, daß Θ stets sehr klein ist (etwa 2 bis $3\cdot10^{-3}$)[31]), daß also nur die longitudinalen Wellen zum Entstehen der Beugungsfigur beitragen, deren Ausbreitungsvektor auf dem Mantel eines sehr stumpfen Kegels um den Primärstrahl, also nahezu in einer Ebene senkrecht zum Primärstrahl liegt. Demnach läßt sich die ganze Erscheinung auch als Beugung an einem ebenen Gitter senkrecht zum Primärstrahl auffassen, keinem gewöhnlichen Strichgitter allerdings, sondern einer Summe von solchen, die in allen möglichen Richtungen flach aufeinander gelegt sind. Denn man hat sich ja Bild 2 räumlich für alle Azimute φ gezeichnet zu denken (s. a. weiter unten!). Formel (4) ist dann die gewöhnliche Beugungsformel für ein ebenes Gitter mit der Gitterkonstanten Λ.

Der Streustrahl trifft einen im Abstand l aufgestellten Schirm im Punkt P_1, dessen Abstand r vom Durchstoßungspunkt P_0 des Primärstrahles sich unter Berücksichtigung der Austrittsbrechung berechnet zu

$$r = n\cdot 2\cdot\Theta\cdot l \quad ^{32})$$

oder nach [4]

$$= \frac{n\,l\,\lambda_i}{\Lambda}$$

n = opt. Brechungsindex des elast. Med.

und, da

$$k = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad , \qquad r = \frac{n\,k\,l\,\lambda_i}{2\pi}$$

Die Lichtwellenlänge außerhalb des Mediums ist $\lambda = n\,\lambda_i$; also hat man

[5] $$r = \frac{l\cdot\lambda\cdot k}{2\pi} = \text{Const. } k.$$

Die Ueberlegung bleibt dieselbe, falls man an Stelle des Einzelstrahles ein Bündel paralleler Strahlen verwendet, die alle unter dem gleichen Winkel 2 n Θ austreten und von einer Linse in P_1 vereinigt werden.

Denkt man sich nun Bild 2 räumlich für alle Azimute φ um den Primärstrahl gezeichnet, so beschreibt der Punkt P_1 auf dem Schirm die gesuchte Interferenzfigur $r = r(\varphi)$, während der Endpunkt von ℓ die Figur beschreibt, die als Schnitt der Form-Frequenz-Fläche (im folgenden als F.-F.-Fläche bezeichnet) mit der Ebene $\ell_z = 0$ (senkrecht zum Primärstrahl) entsteht: $k = k(\varphi)$. Nach (5) ist aber

$$r(\varphi) = \frac{l\lambda}{2\pi}\cdot k(\varphi) \ .$$

Also ergibt sich:

Die gesuchte Interferenzfigur ist das im Maßstab $\frac{l\,\lambda}{2\pi}$ vergrößerte Abbild des Schnittes der F.-F.-Fläche mit der Ebene $\ell_z = 0$. Im allgemeinen hat die F.-F.-Fläche 3 Mäntel, also werden auch in der Schnitt- bezw. Interferenz-Figur zu jedem Winkel φ 3 Interferenzpunkte

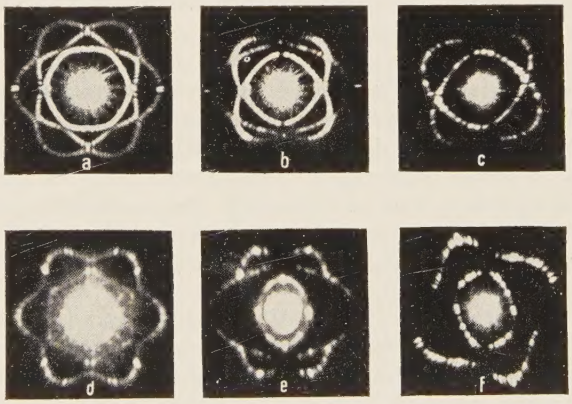

Bild 3. Beugungsfiguren am schwingenden Quarz und Kalkspat.
a, b, c: Quarz bei Durchstrahlung in der z-, y-, x-Achse; d, e, f: Kalkspat bei Durchstrahlung in der z-, y-, x-Achse.

[30]) Wegen der transversalen Komponente s. S. 452 ff.

[31]) Es liegt dies an dem Umstand, daß die Lichtwellenlänge klein gegen die elastische Wellenlänge, die Gitterkonstante, ist. Bezüglich einer tieferen Begründung siehe L. Bergmann, „Der Ultraschall" (Berlin 1937, VDI-Verlag), S. 147.

[32]) Hierbei ist der Einfachheit halber angenommen, daß das Licht unmittelbar bei O aus dem Medium austritt. Der in Wirklichkeit vorhandene und in Bild 2 auch eingezeichnete Knick der Strecke OP_1 wird später (S. 458) berücksichtigt.

gehören. Als Beispiel derartiger Beugungsfiguren, die an anisotropen Körpern gewonnen wurden, sind in Bild 3 die Aufnahmen wiedergegeben, die bei Durchstrahlung eines Quarz- bezw. Kalkspatwürfels in jeweils 3 zueinander senkrechten Richtungen erhalten wurden. Es zeigen Bild 3 a bis c die Verhältnisse beim Quarz für Durchstrahlung in der z-(optischen), sowie in der y- und x-(elektrischen) Achse; 3 d bis f geben die Interferenzfiguren des Kalkspates[33]) bei Durchstrahlung in den analogen Richtungen wieder. Man erkennt auf den ersten Blick, daß sich die Symmetrie der elastischen Daten in den Figuren widerspiegelt.

Im Fall des isotropen Körpers ergibt die Rechnung für den Schnitt der F.-F.-Fläche mit der Ebene $\mathfrak{k}_z = 0$ (hier würde auch der strenge Fall des Kegels kein anderes Ergebnis liefern!) die Gleichungen:

$$\mathfrak{k}^2_x + \mathfrak{k}^2_y = \frac{\varrho\,\omega^2}{\lambda + 2\mu} \text{ und } \mathfrak{k}^2_x + \mathfrak{k}^2_y = \frac{\varrho\,\omega^2}{\mu}$$

(Letztere tritt zweimal auf.) Die Interferenzfigur bilden also zwei konzentrische Kreise mit den Radien

$$[6] \quad \left.\begin{aligned} r &= \omega\ \frac{\lambda\, l}{2\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{\lambda+2\mu}} = \nu\, l\, \lambda \sqrt{\frac{\varrho}{\lambda+2\mu}} \\ R &= \omega\ \frac{\lambda\, l}{2\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{\mu}} = \nu\, l\, \lambda \sqrt{\frac{\varrho}{\mu}} \end{aligned}\right\} \frac{r^2}{R^2} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}$$

Der innere Kreis mit r gehört der longitudinalen, der äußere mit R den beiden transversalen Wellen zu.

Es muß an dieser Stelle noch auf das Entstehen des Transversalkreises eingegangen werden. Während nämlich die Beugung des Lichtes an den longitudinalen Wellen auf Grund der damit verbundenen Dichteänderungen ohne weiteres verständlich und dem Fall der Lichtbeugung an einer Schallwelle in Flüssigkeiten analog ist, ist das Entstehen einer Beugung an den Transversal-(Scherungs)Wellen, die ja keine Volumenänderung verursachen, nicht sofort einzusehen, zumal auch die Theorie von Fues und Ludloff[34]) in erster Annäherung für das in den Transversalkreis abgebeugte Licht die Intensität Null liefert. Tatsächlich ist die Ursache einer derartigen Beugung in der Spannungsdoppelbrechung zu suchen. Die Verhältnisse lassen sich experimentell erst bei der Untersuchung im polarisierten Licht übersehen.

Betrachten wir den Verzerrungszustand einer ebenen transversalen Welle in einem bestimmten Moment, so haben wir etwa ein Bild, wie es im Schnitt parallel zur Fortpflanzungsrichtung in Bild 4 unten wiedergegeben ist. Die ursprünglich quadratischen Flächenelemente (oben) sind durch die Schubwelle zu flächengleichen Rhomben verzerrt, deren Achsen ξ, η nahezu unter 45° gegen die Fortpflanzungsrichtung (x) geneigt sind. Es herrscht in der ξ-Achse maximale

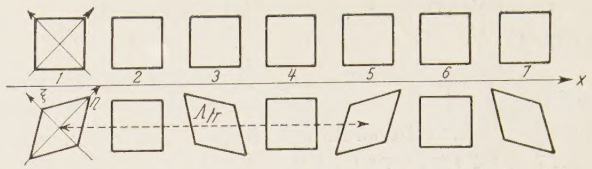

Bild 4. Elastische Verzerrung quadratischer Flächenelemente durch eine Transversalwelle.

Verdichtung, in der η-Achse maximale Verdünnung und umgekehrt, je nachdem, ob wir es mit einem Wellenberg, wie in 1 und 5, oder einem Wellental, wie in 3 und 7, zu tun haben. In den Wellenknoten, bei 2, 4, 6 endlich sind die Flächen unverzerrt geblieben. Zwei aufeinanderfolgende Rhomben gleicher Verzerrung haben einen Abstand von einer Wellenlänge Λ_{tr}. Man muß sich viele Reihen wie in Bild 4b untereinandergesetzt denken, um den vollständigen Schnitt einer ebenen Welle zu erhalten, durch die nunmehr senkrecht zur Papierebene paralleles Licht fallen soll.

a) Wir betrachten zuerst den Fall, daß der Schwingungsvektor des einfallenden Lichtes in einer der Richtungen ξ oder η liege; dann hat man offenbar genau wie im Falle einer longitudinalen Welle einen mit Λ_{tr} periodischen Brechungsindex, da sich die (lineare) Dichte mit Λ_{tr} periodisch ändert. Es entsteht die normale Beugungserscheinung, deren Licht den ursprünglichen Polarisationszustand beibehalten hat. Durch einen zur Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes senkrecht gekreuzten Nicol betrachtet, erscheint daher sowohl das Beugungsspektrum als auch das Innere des Mediums selbst vollständig dunkel.

b) Fällt natürliches Licht ein, so kann man sich jede Schwingung in die ξ- und η-Komponente zerlegt denken, und die gesamte einfallende Energie wird sich im Mittel gleichmäßig auf beide Schwingungsrichtungen verteilen. Jeder Anteil liefert nach a) eine Beugung, so daß zwei völlig gleiche Spektren entstehen, die sich genau, Maximum auf Maximum, Minimum auf Minimum, überdecken. Da beide nicht kohärent sind, können sie sich ohne Interferenz zu einem Spektrum von unpolarisiertem Licht überlagern. Im Medium selbst dagegen wird man zunächst keinerlei Struktur erkennen können, falls man versucht, sie in einer Schlierenanordnung sichtbar zu machen[35]); denn es fallen die Minima von ξ gerade auf die Maxima von η und umgekehrt. Erst wenn man durch die Benutzung eines Analysatornicols die eine Komponente ganz oder teilweise auslöscht, muß wieder die periodische Dichteverteilung wirksam werden und sich dann mit der Schlierenanordnung sichtbar machen lassen.

c) Beim Einfall linear polarisierten Lichtes von beliebiger Schwingungsrichtung liegen die Verhältnisse etwas komplizierter. Man zerlegt wieder in die ξ- und η-Komponente, die sich

[33]) Cl. Schaefer u. L. Bergmann, Rendiconti della Acc. Naz. dei Lincei, XXI 6a (1935), S. 701.
[34]) A. a. O.
[35]) Siehe z. B. Cl. Schaefer u. L. Bergmann, Sitz.-Ber. Berl. Akad., 1935, S. 223.

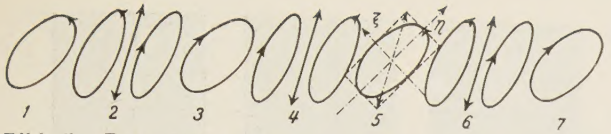

Bild 5. Polarisationszustand eines linear polarisierten Lichtbündels nach dem Durchgang durch eine elastische Transversalwelle.

aber diesmal, weil kohärent, beim Austritt wieder zusammensetzen und zwar zu elliptisch polarisiertem Licht, da die Komponenten infolge des verschiedenen Brechungsindex, m. a. W. wegen der „Spannungsdoppelbrechung", eine Phasenverschiebung erlitten haben. Betrachtet man jetzt den elastischen Körper selbst durch einen Analysator, der zu dem Polarisatornicol senkrecht gekreuzt steht, so sieht man sowohl an den Wellenbergen wie an den Wellentälern eine Aufhellung; im ganzen also ein Gitter mit der Gitterkonstanten $\frac{\Lambda_{tr}}{2}$!

Für das Zustandekommen des Beugungsbildes muß man aber zwischen Wellenberg und Wellental genau unterscheiden. Die Ellipsen des austretenden Lichtes haben hier, wie man sich überlegt, zwar gleiche Gestalt und Neigung, werden aber entgegengesetzt umlaufen, da ordentlicher und außerordentlicher Strahl vom einen zum anderen Falle ihre Rollen vertauschen. In den Wellenknoten ist die ursprüngliche lineare Schwingung erhalten geblieben. Der optische Schwingungszustand längs einer elastischen Transversalwelle sieht dann z. B. so aus, wie Bild 5 (für eine maximale Phasenverzögerung von $\frac{\pi}{2}$)[36]) zeigt, wobei noch Zwischenstufen eingezeichnet sind. Da sich die ganze Erscheinung im Abstand einer elastischen Wellenlänge identisch wiederholt, so schwingen auch alle gleichen Ellipsen (mit demselben Umlaufsinn — in Bild 5 z. B. 1 und 5, sowie 3 und 7 usw.)[37]) in Phase, d. h. erreichen ihren oberen Kulminationspunkt usw. zur gleichen Zeit. Bei der Beugung sind nun sämtliche austretenden Strahlen miteinander zur Interferenz zu bringen. Es herrscht Helligkeit offenbar in den Richtungen, in denen Strahlen gleichen Polarisationszustandes (also etwa 1 und 5, 3 und 7 usw.) mit gleicher Phase zur Wirkung kommen, also eine Wegdifferenz von $m \cdot \lambda_{opt}$ (m = 0, 1, 2, 3 . . .) haben. Aus Bild 6 liest man ab, daß dies die Richtungen

$$\Theta_m = \frac{m \cdot \lambda_{opt}}{\Lambda_{tr}} \quad m = 0, 1, 2, 3 \ldots,$$

d. h. die Beugungswinkel eines Gitters mit der Gitterkonstanten Λ_{tr} sind (nicht $\frac{\Lambda_{tr}}{2}$, wie man vielleicht aus der direkten Beobachtung des Gitters im Medium schließen könnte!). In den dazwischen liegenden Richtungen

$$\Theta'_m = \frac{(m + 1/2)\,\lambda_{opt}}{\Lambda_{tr}} \quad m = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

löschen sich Strahlen gleicher Polarisation immer paarweise aus, da sie offenbar eine Wegdifferenz von $m\lambda_{opt} + \frac{\lambda_{opt}}{2}$, d. h. die Phasendifferenz π gegeneinander haben; es herrscht also wie bei einem gewöhnlichen Gitter Dunkelheit. Faßt man in den Beugungsrichtungen Θ_m je 2 Strahlen mit gleicher, aber entgegengesetzt umlaufener Schwingungsellipse zusammen, deren zugehörige Gitterpunkte den Abstand $\frac{\Lambda_{tr}}{2}$ haben (also 1 und 3, 5 und 7 usw.), so zeigt sich ein fundamentaler Unterschied zwischen gerader und ungerader Ordnung m der Beugung:

I. Ist m gerade, so sind die Phasenverhältnisse der beiden ins Auge gefaßten Ellipsen dieselben wie unmittelbar beim Austritt; denn die Wegdifferenz der beiden Strahlen beträgt $\frac{m}{2}\lambda_{opt}$, also ein ganzes Vielfaches einer optischen Wellenlänge. Die beiden entgegengesetzt umlaufenden Schwingungsvektoren kommen zweimal bei jedem Umlauf zur Deckung und zwar auf Grund der beschriebenen Phasenverhältnisse gerade dann, wenn sie die Richtung p des ursprünglichen Schwingungsvektors haben, so daß schließlich eine lineare Schwingung der Richtung p resultiert (Bild 7a)[38]).

II. Anders ist es bei den ungeraden Ordnungen der Beugung. Diesmal bewirkt die noch hinzukommende Phasendifferenz von π bei dem Ellipsenpaar, daß die Schwingungsvektoren sich in der Richtung p gerade auslöschen, sich dagegen in der Richtung p' decken, die das Spiegelbild von p bezüglich ξ- und η-Achse darstellt. Die Ueberlagerung gibt eine lineare Schwingung der Richtung p', deren Amplitude mit dem Achsenverhältnis der Ellipsen[39]) abnimmt

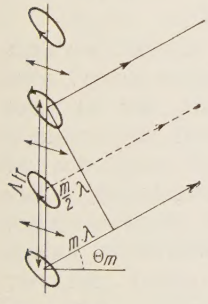

Bild 6.
Beugung am Transversalwellengitter.

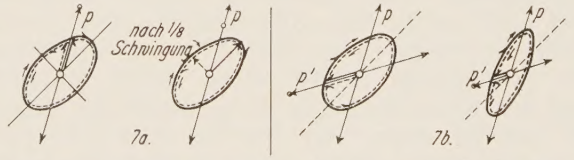

Bild 7. Zusammensetzung zweier gegensinnig umlaufender elliptischer Lichtschwingungen.

[36]) Die folgende Betrachtung gilt natürlich allgemein.

[37]) Die Zahlen der Bilder 4 und 5 entsprechen einander.

[38]) Die in Wirklichkeit aufeinanderfallenden Ellipsen sind in der Figur der Deutlichkeit halber ineinander gezeichnet und als ausgezogen und punktiert unterschieden.

[39]) Das heißt mit der Phasenverzögerung.

(Bild 7b). Die linear polarisierten Strahlen aus zwei aufeinander folgenden Wellenknoten löschen sich diesmal aus, da sie eine Wegdifferenz von

$$m \cdot \frac{\lambda_{opt}}{2} = \left(\frac{m-1}{2}\right) \lambda_{opt} + \frac{\lambda_{opt}}{2} \; ; \; \left(\frac{m-1}{2} \text{ ganzzahlig}\right),$$

also eine Phasendifferenz von π haben.

Das gesamte Beugungsspektrum hat bei linear eingestrahltem Licht schließlich etwa folgenden optischen Schwingungszustand:

Ordnung des abgebeugten Strahles:	−2	−1	0	+1	+2
Schwingungsrichtung des Lichtes:	p	p'	p	p'	p

oder in dem extremen Fall, daß die ursprüngliche Schwingungsrichtung unter 45° zur ξ- und η-Achse liegt (z. B. senkrecht zur x-Achse): Bild 8.

Bild 8. Polarisationszustand der Beugungsspektren eines Transversalwellengitters.

Betrachtet man dieses letztere Beugungsbild durch einen Analysator, der senkrecht zum Polarisator steht, so beobachtet man nur die ungeraden Ordnungen — praktisch wegen der geringen Intensität höherer Ordnungen nur die ± 1. Bei parallel gestelltem Analysator dürften nur das Zentralbild und die geraden Ordnungen erscheinen. In der Tat verschwindet auch experimentell die ± 1. Ordnung[40]). Daß man dagegen die 2. Ordnungen nicht beobachtet, dürfte nach unserer Ueberzeugung wieder an der zu geringen Intensität des durch die Transversalwelle abgebeugten Lichtes liegen.

Um also Lichtbeugung an Transversalwellen zu erhalten, ist es keineswegs notwendig, mit gekreuzten Nicols zu arbeiten, wohl aber aus praktischen Gründen ganz zweckmäßig. Denn es läßt sich so das helle Zentralbild, das sonst die Aufnahmen ziemlich stark überstrahlt, sowie störendes Streulicht auslöschen. Außerdem hat man es in der Hand, die meist stark überwiegende Helligkeit des von der Longitudinalwelle herrührenden Kreises abzuschwächen. Letzterer verschwindet bei gekreuzten Nicols sogar fast vollständig. Um das zu vermeiden, macht man das Licht, bevor es das schwingende Glas durchsetzt, etwas elliptisch und kann so die Intensität einigermaßen gleichmäßig auf beide Kreise verteilen. Das Verhältnis der Helligkeiten beider Kreise hängt übrigens von den elasto-optischen Konstanten des Glases ab und ist daher von Fall zu Fall sehr verschieden; doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Die verschiedenen Polarisationsverhältnisse sind in den folgenden Bildern nochmals experimentell wiedergegeben. In

[40]) Vgl. Bild 9d und e.

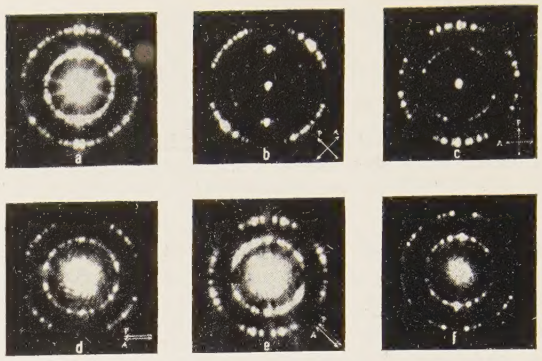

Bild 9. Beugungsfiguren am schwingenden Glas.
a: Aufnahme mit natürlichem Licht.
b, c: Aufnahme zwischen gekreuzten Nicols.
d, e: Aufnahme zwischen parallelen Nicols.
f: Aufnahme mit elliptischem Licht.

Bild 9a ist natürliches Licht verwendet. Neben dem sehr hellen Zentralbild und dem longitudinalen Kreis erscheint deutlich der Transversalkreis. Die Punkte oben und unten entsprechen der Anregungsrichtung und sind deshalb besonders stark. In den folgenden Bildern 9b und c ist zwischen gekreuzten Nicols beobachtet. Nach S. 452 Abschnitt a) tritt Auslöschung der Beugung derjenigen Transversalwellen ein, deren ξ- oder η-Achse in die Schwingungsrichtung des eingestrahlten Lichtes fällt. Das sind in Bild 9b die horizontal und vertikal verlaufenden Wellen, da die Nicols unter 45° standen; in Bild 9c die diagonal laufenden Wellen, da die Nicols diesmal waagerecht und senkrecht standen. In den Bildern 9d und e stehen Polarisator- und Analysatornicol parallel. Diesmal tritt vollständige Auslöschung in den Richtungen parallel und senkrecht zur Schwingungsrichtung ein, wie man sich aus dem oben Gesagten überlegt. In der Tat liegt in Bild 9d die Schwingungsrichtung waagerecht, in Bild 9e unter 45°. Bild 9f endlich ist mit elliptischem Licht aufgenommen; die Helligkeitsunterschiede zwischen den Kreisen sind einigermaßen ausgeglichen. Außerdem ist auf besondere Feinheit der Beugungspunkte Wert gelegt, da es sich im Gegensatz zu den übrigen Aufnahmen um ein Bild handelt, das wirklich für die quantitativen Glasmessungen ausgewertet werden sollte.

3. Versuchsanordnung.

Für die Messung der elastischen Konstanten standen 42 Glaswürfel von 19 mm Kantenlänge zur Verfügung, die an zwei gegenüberliegenden Flächen poliert und optisch gut homogen waren[41]). Bild 10 zeigt die zu ihrer Untersuchung benutzte Anordnung schematisch in der Aufsicht. Um die Schwingungen anstoßen zu können, wird der Würfel in einem besonderen Halter in engen Kontakt mit der Piezoquarzplatte Q gebracht. Das ge-

[41]) Für die Ueberlassung dieser Glaswürfel sind wir der Firma Jenaer Glaswerk Schott u. Gen., Jena, zu großem Dank verpflichtet.

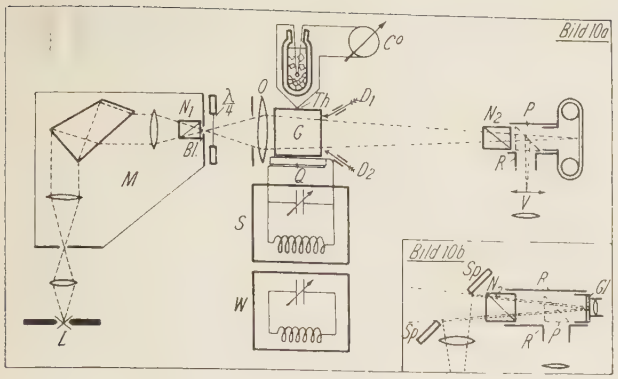

Bild 10. Versuchsanordnung.

schieht einfach dadurch, daß man ihn mit einem Tropfen dickflüssigen Oeles fest und ohne Luftzwischenschicht auf die Quarzplatte aufdrückt. Es wird so das lästige Aufkitten vermieden und ein sehr rasches Auswechseln der Würfel ermöglicht. Die Quarzplatten waren senkrecht zur elektrischen Achse orientiert und hatten auf beiden Seiten kathodisch aufgestäubte Goldelektroden; sie waren ihrerseits ebenfalls leicht auswechselbar und wurden aus einem Satz von 1,8 bis 2,3 mm Dicke ausgewählt. Angeregt wurden diese Platten mit Frequenzen von 4000 bis etwa 10 000 kHz; sie schwangen also in der 3. bis 9. Harmonischen ihrer Dickenschwingung. Die Hochfrequenz lieferte ein einfacher Sender S in Dreipunktschaltung, zu dessen Schwingungskreis die Quarze direkt parallel geschaltet wurden. Die Schwingleistung betrug bei 1000 Volt Gleichspannung an der Anode etwa 40 bis 50 Watt, doch war es gelegentlich vorteilhaft, mit geringerer Anodenspannung zu arbeiten. Um einwandfrei ausgebildete Interferenzpunkte und eine genaue Frequenzmessung zu erhalten, wurde sehr darauf geachtet, daß die Welle des Senders nicht schwankte; eine gute Abschirmung war daher unerläßlich. Gemessen wurde die Frequenz mit einem im hiesigen Institut gebauten Resonanzwellenmesser W mit Detektor und Galvanometer. Der Wellenmesser wurde zunächst mit einem Präzisionswellenmesser der Firma Telefunken[42]) verglichen, später aber nochmals sorgfältig mit Loewe-Normalquarzen nachgeeicht. Die erreichte Absolutgenauigkeit betrug demnach mindestens 0,1%.

Durch den Schwingungsvorgang erwärmt sich sowohl der Quarz, als auch der Glaswürfel selbst nach einigen Minuten recht merklich, was während der Messung mit Hilfe eines Thermoelementes Th dauernd kontrolliert werden konnte. So wurde z. B. am Ort des Thermokontaktes, also an der der Quarzplatte gegenüberliegenden Seite, nach 10 Minuten langem Schwingen eine Temperaturerhöhung von 20° gemessen. Wenn diese Erwärmung an sich auch die Elastizitätskonstanten während einer Aufnahme, die übrigens viel kürzere Zeit in Anspruch nahm (s. u.), kaum merklich verändern würde, so ist sie doch aus dem Grunde sehr störend, weil sie nicht über den ganzen Würfel homogen ist. Vielmehr entstehen, wie man an einer allgemeinen Aufhellung zwischen gekreuzten Nicols deutlich erkennt, unregelmäßige innere Spannungen, die die optische Homogenität des Glases stören und die Güte der Interferenzfiguren sehr ungünstig beeinflussen können. Es wird daher während der Messung dauernd ein kalter Luftstrom aus den Düsen D_1 D_2 gegen den Würfel geblasen, der die Temperatur bei Th selbst bei lang andauerndem Schwingen nicht über etwa 25° steigen läßt.

Der optische Teil der Apparatur besteht im wesentlichen aus Lichtquelle, Monochromator, Objektiv und Kamera. Als Lichtquelle dient eine Bogenlampe L, deren Krater in üblicher Weise auf den Eintrittsspalt des Leißschen Monochromators M abgebildet wird. Es hat sich erwiesen, daß größere Helligkeit weit wichtiger ist als gute Monochromasie, so daß der Eintrittsspalt sehr weit (etwa 0,5 mm) geöffnet wurde[43]). An die Stelle des Austrittsspaltes trat dagegen eine sehr feine, möglichst gut runde Lochblende Bl von ca. 30 μ Durchmesser; eine solche Kleinheit ist notwendig, da diese Blende für die Feinheit der Interferenzpunkte verantwortlich ist (s. a. weiter unten). Die im 2. Abschnitt erwähnte elliptische Polarisation des Lichtes wird durch ein vor der Blende fest eingesetztes Nicolsches Prisma N_1 und ein unmittelbar hinter Bl befindliches drehbares $\lambda/4$-Glimmerblättchen erreicht. Das Objektiv O, ein Voigtländer-Projektions-Anastigmat von f = 15 cm Brennweite, bildet nun die leuchtende Punktblende durch den schwingenden Würfel G und den Analysator N_2 hindurch auf die photographische Schicht ab, wo sich also auch die gesuchte Interferenzfigur ausbildet. Die Verwendung einer Leica als Aufnahmekamera gestattete es, rasch hintereinander eine große Anzahl von Aufnahmen auf denselben Film zu machen. Als Negativmaterial wurde dabei wegen seiner hohen Empfindlichkeit Agfa-ISS-Film gewählt. Damit war auch die günstigste Lichtwellenlänge festgelegt: Licht von etwa 620 mμ gab gemäß der Energieverteilung der Bogenlampe und der spektralen Empfindlichkeit des Films die stärkste Schwärzung. Für visuelle Beobachtung wird das Prisma P in den Strahlengang eingeschoben; die Interferenzfigur entsteht dann als reelles Bild bei V und wird mit einer Lupe betrachtet. Der Rohrstutzen R, der Nicol, Prisma und Kamera trägt, läßt sich meßbar verschieben und erlaubt so die Scharfeinstellung des Lichtfleckes auf die

[42]) Der Firma Telefunken G. m. b. H., Berlin, sind wir für die Ueberlassung dieses Wellenmessers zu großem Dank verpflichtet. Das gleiche gilt für die Firma Radio A.G. D. S. Loewe, die uns freundlicherweise verschiedene geeichte Leuchtquarze zur Verfügung stellte.

[43]) Ueber eine genaue Untersuchung des spektralen Bereichs siehe S. 457.

Filmebene[44]). Zu diesem Zweck wird an die Stelle der Kamera ein Tubus (Leitz Leica-Einstellgerät) gesetzt, der genau am Ort der Filmebene eine Glasplatte mit Teilung (Gl in Abb. 10b) und dahinter eine ca. 30fach vergrößernde Lupe trägt. Die Einstellung mußte wegen des verschiedenen Brechungsindex der Gläser für jeden Würfel neu erfolgen. Ebenso wurde die Film- bezw. Einstellebene jedesmal von neuem senkrecht zum Strahlengang justiert, weil die Würfel gewöhnlich nicht genau planparallele Endflächen hatten und mithin das Lichtbündel meist irgendwie schräg austreten ließen. Die Justierung geschieht mit Hilfe des in Bild 10b gezeigten Spiegels Sp, der in der Mitte eine Oeffnung besitzt. Man setzt diesen Spiegel zunächst so in den Strahlengang, daß das Licht durch die Oeffnung auf die schwach vergoldete Vorderseite der Platte Gl fällt. Dann neigt man das Rohr R mit der Glasplatte solange, bis der Auftreffpunkt des reflektierten Strahles, den man mit der Lupe auf der Spiegeloberfläche betrachtet, genau wieder auf die Oeffnung fällt. Nach der Justierung wird selbstverständlich der Spiegel wieder aus dem Strahlengang entfernt.

Die eigentliche Aufnahme geht nun so vor sich, daß man den Sender schwingen läßt und seine Frequenz sehr langsam verändert, bis sich bei V eine Interferenzfigur mit möglichst vielen deutlich ausgeprägten Interferenzpunkten ausbildet. Nachdem man noch durch Drehen des $\lambda/4$-Blättchens beide Kreise auf nahezu gleiche Helligkeit gebracht hat, wird das Prisma P herausgeklappt, und der Film belichtet. Die Belichtungszeit betrug bei den meisten Versuchen nur etwa ½ bis 2 Minuten; aber selbst während dieser kurzen Zeit und trotz der Luftkühlung trat bei vielen Gläsern schon merkliche Verschlierung auf, die sich in einer Verwischung der Interferenzpunkte äußerte. Es wurde deshalb meist nicht durchgehend, sondern in Absätzen belichtet, indem Anregung und Belichtung etwa nach 10 Sekunden unterbrochen, nach 20 Sekunden Pause wieder fortgesetzt, dann wieder unterbrochen wurden, usf. Während der Belichtung wurde auch die Frequenz gemessen. Die Durchmesser der so erhaltenen Kreise liegen größenordnungsmäßig zwischen 3,5 mm und 1,5 mm für 2 r, sowie 6 mm und 2,5 mm für 2 R. Sie wurden unter dem Meßmikroskop für jeden Kreis mehrmals, meist viermal, in verschiedener Richtung ausgemessen, und dann aus allen Messungen gemittelt.

Diese Messung läßt sich offenbar umso genauer ausführen, je kleiner das Verhältnis Radius der Interferenzflecke zu Radius der Kreise, m. a. W. je „feiner" die Interferenzfigur ist. Daraus ergeben sich für die Dimensionierung der Apparatur folgende Gesichtspunkte:

1. Von dem Abstand l der Kamera vom Würfel ist die Feinheit unabhängig, da etwa bei Vergrößerung von l die Interferenzflecke und die Kreise in gleichem Maße wachsen. Im Interesse kurzer Belichtungszeiten wird man sogar kleines l vorziehen, weil unter sonst gleichen Verhältnissen die Flächenhelligkeit der Punkte wächst, sobald man l und damit die Brennweite f von O verringert. Man macht also die Figuren so klein, wie es mit Rücksicht auf Filmkorn usw. möglich erscheint.

2. Demgegenüber läßt sich eine wirkliche „Verfeinerung" der Figuren durch Verengung der Punktblende Bl oder Vergrößerung ihres Abstandes vom Objektiv (Verlängerung der Brennweite) erreichen; denn damit verkleinern sich die Interferenzpunkte ohne Aenderung von Helligkeit oder Beugungswinkel. Eine untere Grenze für den Radius der Interferenzflecke ist durch die Beugung des Lichtes an der Blende des Objektivs O gegeben. Experimentell liegt der Radius der Flecke nur wenig oberhalb dieser Grenze, so daß beim Zuziehen der Blende von O schon sehr bald deutliche Beugungen auftreten.

3. Schließlich ist eine Verfeinerung der Figuren noch möglich durch Erhöhung der Anregungsfrequenz. Hierbei wird lediglich das elastische Gitter feiner, also die Kreise größer. Eine obere Grenze ist auch hier durch die schließlich stark ansteigende Verschlierung gegeben.

Die in der Apparatur verwendeten Maße waren schließlich $l \approx 1$ m; $b \approx 30\ \mu$; $a \approx 16$ cm; $\nu \approx 4000$ bis 10 000 kHz.

4. Formeln zur Berechnung von σ, μ, E.

Aus den Werten für R und r läßt sich zunächst direkt σ, die Querkontraktion, berechnen. Nach Abschnitt 2, Formel (6) ist nämlich

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\ .$$

Andererseits ist $\sigma = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$,

so daß sich ergibt $\sigma = \dfrac{1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2}{2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2}$

Für die Bestimmung von σ braucht man also weder Dichte ϱ, noch optische Wellenlänge λ und Kameraabstand l, noch insbesondere die Frequenz ν zu kennen. Das Verhältnis $\frac{r}{R}$ ist von ν unabhängig, weil nach (6) r wie R proportional ν sind. Dies ließ sich auch experimentell immer wieder bestätigen. Eine Meßreihe sei als Beispiel in der nachstehenden Tabelle wiedergegeben:

[44]) Bei einer neueren Apparatur wird die Scharfeinstellung nicht durch Verschiebung der Kamera, sondern einfacher durch Verstellung des Objektivs erreicht. Auf diese Weise besitzt die Apparatur einen festen Abstand Kamera — Glaswürfel. Eine so gebaute tragbare Anordnung ist beschrieben in L. Bergmann, „Der Ultraschall" (Berlin 1937, VDI-Verlag), S. 141.

Tafel 1.

k	ν_{KHz}	$2r_{mm}$	$2R_{mm}$	r/R	$\delta\left(\frac{r}{R}\right)$	$\frac{2r}{\nu} \cdot 10^8 \frac{cm}{sec}$	$\delta\left(\frac{2r}{\nu}\right)$	$\frac{2R}{\nu} \cdot 10^8 \frac{cm}{sec}$	$\delta\left(\frac{2R}{\nu}\right)$
3	4158	1,193	2,064	0,5780	− 0,14%	2,869	− 0,03%	4,964	+ 0,10%
5	7379	2,118	3,649	0,5804	+ 0,28%	2,870	0,00%	4,945	− 0,28%
7	10113	2,903	5,023	0,5779	− 0,16%	2,871	+ 0,03%	4,967	+ 0,16%
		Mittelwert:		0,5788		2,870		4,959	

(Hierbei bedeutet k die Ordnung der Oberschwingung, in der der anregende Quarz schwingt, δ den scheinbaren Fehler der Werte in der jeweils voranstehenden Spalte.)

Der Torsionsmodul ist gleich der Laméschen Konstanten μ, die sich nach Abschnitt 2 (6) ergibt zu:

$$\mu = \nu^2 \lambda^2_{opt} \, l^2 \, \varrho \cdot \frac{1}{R^2} \, .$$

Für μ ist also der äußere Kreis allein verantwortlich; es gehen aber noch Frequenz und Dichte, sowie die Apparaturkonstanten l und λ_{opt} ein. Letztere kann man entweder direkt bestimmen oder ein Gitter mit bekannter Gitterkonstante g zum Vergleich benutzen (vgl. auch den nächsten Abschnitt). Liegt das Gitter unmittelbar am Würfel — der Kamera zugewandt — an, und haben die entstehenden Beugungspunkte 1. Ordnung auf dem Film den Abstand 2a voneinander, so ist

$$a = l \cdot \frac{\lambda_{opt}}{g} \quad ; \quad \lambda_{opt} \cdot l = a \cdot g \, .$$

$$\text{Damit wird } \mu = \frac{\nu^2 a^2 g^2}{R^2} \cdot \varrho \cdot$$

Dabei ist sowohl für die Beugung am Schallwellengitter, als auch am Vergleichsgitter paralleles Licht, d. h. Fraunhofersche Beugung, vorausgesetzt. Der Einfachheit halber wird in der experimentellen Anordnung aber schwach konvergentes Licht angewendet. Eine elementare geometrische Betrachtung zeigt indes, daß der Fehler, den man bei Benutzung der Formeln für paralleles Licht begeht, die Größenordnung $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ nicht überschreitet.

Mit der Bestimmung von a und g oder l und λ_{opt} ist eine vorhandene Apparatur ein für allemal für die Untersuchung von μ „geeicht". Der Elastizitätsmodul E schließlich berechnet sich aus σ und μ nach der bekannten Formel:

$$E = 2\mu \, (1 + \sigma) \, .$$

5. Bestimmung der Dichte und der Apparaturkonstanten.

1. Die Dichte wurde durch Wägung des Würfels in Wasser und in Luft bestimmt. (Siehe Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik, S. 59 und 61.) Bei Berücksichtigung der Dichte des Wassers sowie des Luftauftriebes erreicht man leicht eine Genauigkeit von 0,1% und besser.

2. Das zur Bestimmung der Apparaturkonstanten dienende Vergleichsgitter war bei dem größten Teil der Messungen ein mit der Teilmaschine auf Glas geritztes Gitter (g = 0,2500 mm), bei einem kleinen — älteren — Teil der Messungen, bei denen auch l wesentlich größer war, ein photographisches „Linienraster" (g = 0,4887 mm). Die von diesem Vergleichsgitter erzeugten Beugungen wurden nun zwischen den eigentlichen Glasmessungen wiederholt aufgenommen. Damit ist eine einwandfreie Bestimmung der Apparaturkonstanten $l\lambda_{opt}$ = ag gewährleistet.

3. Neben der Vergleichsgittermethode wurde zur Kontrolle auch noch die viel umständlichere direkte Bestimmung der Apparaturkonstanten l und λ_{opt} durchgeführt. Um die wirksame Lichtwellenlänge zu ermitteln, wurde das aus dem Monochromator austretende Licht mit einem Gitter nochmals spektral zerlegt und gleichzeitig mit einem Ne-Vergleichsspektrum auf ISS-Film aufgenommen. Die Photometrierung und Ausmessung ergab schließlich eine wirksame Wellenlänge von λ_{opt} = 6251 Å. E.

4. Die Entfernung l läßt sich mit einem Maßstab leicht bis auf 0,05% messen. Nur muß man beachten, daß die Strahlen durch das Nicolsche Prisma N_2 (Dicke d; Brechungsindex n_{extr}) laufen, wodurch sich l bekanntlich scheinbar um den Betrag $c = d \cdot \frac{n-1}{n}$ verkürzt. Korrigiert man das gemessene l mit diesem Werte und berechnet aus λ_{opt} und l für das benutzte Glasgitter den Abstand der Interferenzpunkte, so ergibt sich vollständige Uebereinstimmung mit den gemessenen Werten bis in die 3. Dezimale. Die entsprechende Korrektion für die Glasschicht des Vergleichsgitters, die ebenfalls vom abgebeugten Licht durchsetzt wird, macht nur etwa eine Einheit der dritten Dezimale aus.

Bei der Festlegung der Größe l ist aber noch eine wichtige Korrektion notwendig. Im Abschnitt 2 (S. 451) wurde ausgeführt, daß man sich die ganze Interferenzerscheinung am schwingenden Würfel auch hervorgebracht denken kann durch ein ebenes Gitter, das aber irgendwo im Innern des Würfels und nicht gerade unmittelbar an der einen Seitenfläche liegen wird. Um korrekt zu verfahren, müßte man also l von der Mattscheibe bis zu dem Punkte messen und das Vergleichsgitter in dem Punkte anbringen, an dem das wirksame Gitter des schwingenden Würfels liegt. Besonders bei kleinem l fällt diese Unsicherheit ins Gewicht, und es war daher von Interesse, den Ort des wirksamen Schallgitters wenigstens ungefähr festzulegen. Das ist dadurch möglich, daß man die

Gitterkonstante des Schallgitters, also Λ, nochmals unabhängig auf irgendeine andere Weise bestimmt. Aus Lichtwellenlänge, Gitterkonstante und dem Abstand der Interferenzpunkte (= 2a) läßt sich dann rückwärts l und somit der Ort des Schallgitters bestimmen. Bei der praktischen Ausführung dieses Versuches wurde an Stelle des schwingenden Glaswürfels eine schalldurchsetzte Flüssigkeit (Xylol) verwendet, die für die Messung gewisse praktische Vorteile bietet, prinzipiell aber den gleichen Sachverhalt aufweist, wie das Glas. Die akustische Wellenlänge läßt sich hier nach der Methode von Debye, Sack und Coulon[45]) oder Hiedemann und Mitarbeitern[46]) direkt bestimmen. Die Ausführung des Versuches ergab schließlich, daß das wirksame Schallwellengitter eines schwingenden Körpers mit großer Sicherheit in dessen Mitte anzusetzen ist. Das hat für die Messung der Glaswürfel zur Folge, daß man bei der Bestimmung der Apparaturkonstanten die Größe l ebenfalls von der Mitte des Würfels an rechnen muß. Hat der Würfel die Dicke d, den Brechungsindex n, so vermehrt sich l um $\Delta l = \frac{d}{2n}$, wobei wieder die Verkürzung des Lichtweges durch das Glas, also die Knickung des Lichtstrahles beim Austritt berücksichtigt ist. Dementsprechend muß auch das Vergleichsgitter in den Würfel „hineinkorrigiert" werden. Das Gitter, das man an die der Kamera zugekehrte Würfelfläche anlegt, gibt wegen des zu kleinen l einen zu kleinen Abstand a der Interferenzpunkte. Man muß also auch a um eine Größe Δa vermehren, die sich aus der Proportion

$$\frac{l}{l+\Delta l} = \frac{a}{a+\Delta a} \text{ zu } \Delta a = \frac{a}{l} \cdot \frac{d}{2n}$$

berechnet.

6. Die Genauigkeit des Verfahrens.

Bevor die Meßergebnisse mitgeteilt werden, sollen noch einige Angaben über die Genauigkeit des Verfahrens gemacht werden. Die Fehler der Dichte- und der Frequenzbestimmung wurden schon oben (S. 457 bzw. S. 455) zu je etwa 0,1% angegeben. Die Apparaturkonstanten λ_{opt} und l dürften sich aus der direkten Messung mit etwa 0,15% Genauigkeit, aus der Messung am Vergleichsgitter mit weniger als 0,1% bestimmen lassen. Der größere Fehler im ersteren Falle rührt von der Unsicherheit bei der Festlegung des Lichtwellen-Schwerpunktes her, während sich im letzteren Falle sowohl Gitterkonstante g als auch Beugungsabstand a aus einer großen Anzahl von Messungen bestimmen. Daß die wirkliche Genauigkeit sicher noch größer ist, beweist die ausgezeichnete Uebereinstimmung beider Methoden. Als entscheidendes Moment für die Genauigkeit der Elastizitätskonstanten-Bestimmung bleibt schließlich noch die Ausmessung der Beugungsradien selbst. Normalerweise läßt sich ein einzelner Radius R bis auf etwa 0,2% ausmessen, so daß der Mittelwert aus 4 solchen Messungen schließlich einen Fehler von 0,1% aufweisen muß. Der entsprechende Mittelwert für den kleineren Radius r hat wegen der geringeren „Feinheit" (s. S. 456) einen Fehler von etwa 0,16%. Bei stärker verschlierten, schlecht ausgebildeten oder besonders kleinen Figuren muß der Fehler etwas höher veranschlagt werden.

Rein rechnerisch sind nach den obigen Angaben folgende Genauigkeiten zu erwarten: für σ ungefähr 0,9% — die Ungenauigkeit von r und R geht hier wegen der ungünstigen mathematischen Form sehr stark ein — für μ ungefähr 0,4%, für E schließlich ebenfalls 0,4%. Tatsächlich liegen die beobachteten Abweichungen der Konstanten außerhalb dieser durch die Messung als solche gegebenen Grenzen. Der Grund hierfür ist im wesentlichen in einer geringen Abweichung der Figuren von der genauen Kreisform zu sehen, die bei fast allen Gläsern in mehr oder minder starkem Maße auftrat und wahrscheinlich durch eine schwache elastische Anisotropie durch ungleichmäßige Erwärmung verursacht ist. Rechnet man den mittleren Fehler von σ aus den tatsächlich beobachteten Abweichungen der Radien R (4 Messungen) und r (4 Messungen) aus, so kommt man auf Werte von etwa 1% bis 3% je Aufnahme, so daß der Mittelwert aus drei Aufnahmen einen maximalen Fehler von etwas mehr als 1% hat. Entsprechend ist für μ eine Genauigkeit von etwas weniger als 1%, von E von etwa 1% zu erwarten[47]).

Wegen der erwähnten Verzerrung der Kreisform ist es wichtig, die Kreise nicht nur in einer Richtung durchzumessen, sondern die Radienbestimmungen möglichst gleichmäßig um den Umfang zu verteilen, was freilich nicht immer möglich ist. Anderseits hat es keinen Zweck, einer Beobachtung mehr Gewicht beizulegen, wenn die verschiedenen Messungen eines Radius gut übereinstimmen; denn eine solche Uebereinstimmung kann nicht nur von der guten Kreisform der Beugungsfigur, sondern im Gegenteil von der besonders ungünstig gewählten Lage der Radien herrühren.

7. Versuchsergebnisse.

In der Tafel 2 sind die gemessenen Konstanten, und zwar μ und E in kg/mm² angegeben[48]). σ und μ sind jedesmal Mittelwerte aus der in der 4. Spalte angegebenen Anzahl von Bestimmungen; E ist dann aus diesen

[45]) P. Debye, H. Sack u. F. Coulon, Compt. rend. Acad. Sci. Paris, **198** (1934), S. 922.

[46]) Ch. Bachem, E. Hiedemann u. H. R. Asbach, Z. f. Physik, **87** (1934), S. 734; **88** (1934), S. 395.

[47]) Mißt man noch mehr Radien, wie dies an neueren Aufnahmen schon geschehen ist, so läßt sich auch noch höhere Genauigkeit erreichen.

[48]) Die Bezeichnung der Gläser entspricht der im Katalog „Optische Gläser" der Firma Jenaer Glaswerk Schott u. Gen., Jena.

Tafel 2. Tabelle der elastischen Konstanten.

Nr.	Glas	Dichte ϱ g/cm³	Zahl der Messg.	Quer-K.-Koeff. σ	Tors.-Mod. μ kg/mm²	Elast.-Mod. E kg/mm²
1	F 3	3,5131	10	0,229	2270	5579
2	SF 2	3,8772	3	0,204*	2343*	5641*
3	LF 1	3,1880	8	0,217	2562	6235
4	BK 3	2,3861	6	0,195	3172	7579
5	SK 1	3,5714	5	0,262	3136	7913
6	FK 5	2,4800	4	0,213	3073	7456
7	BK 1	2,4704	5	0,208	3136	7576
8	BK 7	2,5256	3	0,207*	3285*	7931*
9	BK 9	2,3215	4	0,212	2609	6323
10	BaLK 3	2,6137	4	0,218	2899	7062
11	K 2	2,6115	4	0,220	2745	6700
12	K 6	2,4358	4	0,211	2815	6820
13	K 9	2,4683	4	0,226	2645	6486
14	ZK 1	2,7001	5	0,234	2819	6957
15	ZK 7	2,5433	3	0,215*	2942*	7146*
17	SK 5	3,3227	3	0,248*	3343*	8344*
18	KF 2	2,7231	4	0,218	2666	6495
19	LLF 2	2,8972	3	0,203*	2569*	6183*
20	LF 6	3,1244	4	0,215	2457	5969
21	F 8	3,4020	10	0,218	2492	6070
22	BaSF 2	3,9726	3	0,247	2495	6221
23	SF 1	4,4265	4	0,233	2360	5821
24	SF 6	4,9689	2	0,240	2275	5643
25	KzF 2	2,5402	4	0,224	2129	5211
26	PKS 1	2,5837	4	0,228	2776	6819
27	KzFS 1	3,2363	5	0,276	2243	5725
28	SFS 1	5,9658	4	0,263	2092	5284
29	BaK 1	3,1955	4	0,248	2995	7476
33	PK 1	2,4589	3	0,206	3112	7505
34	BaLK 2	2,6152	3	0,223	2869	7016
36	KF 1	2,7803	3	0,215	2883	7003
37	LLF 3	2,9875	3	0,212	2869	6952
38	BaF 1	3,0150	3	0,235	2505	6188
39	BaF 10	3,8281	4	0,271	3478	8840
40	BaSF 7	3,8509	4	0,274	3591	9151
41	PSK 1	2,8705	3	0,226	3454	8469
42	PSK 2	3,0539	3	0,240	3560	8826
43	BaLF 1	3,0982	3	0,235	2728	6740
44	BaLF 4	3,1749	3	0,249	3104	7756
45	SSK 1	3,6410	3	0,264	3149	7959
46	SSK 2	3,6752	3	0,265	3159	7990
49	BaK 4	3,1095	4	0,245	3121	7770

in der Tafel angegebenen Werten von σ und μ berechnet, so daß also die Beziehung $E = 2\mu \cdot (1+\sigma)$ in der Tabelle zwangsläufig erfüllt ist. Ein kleiner Teil der Werte entstammt einer älteren Meßreihe, deren mutmaßlicher Fehler etwas über dem im vorigen Abschnitt angegebenen liegen kann. Die betreffenden Zahlen sind dann mit einem * versehen. Da die oben angegebene Genauigkeit etwa 1% beträgt, hätte es an sich keinen Zweck, E und μ auf mehr als drei Stellen anzugeben. Dies ist aus dem Grunde doch geschehen, weil die Uebereinstimmung der verschiedenen Messungen sich vielfach über die angegebene Genauigkeit hinaus bis auf die dritte Stelle erstreckte.

Ein Vergleich mit früheren Messungen ist nur bei wenigen Gläsern möglich, wie Tafel 3 zeigt.

Hierin bedeuten E und σ die Messungen der vorliegenden Arbeit, E' die Werte von Winkelmann und Schott[3]), E'' die von Winkelmann[6]), σ' die Untersuchungen von R. Straubel[7]).

Tafel 3. Vergleich alter und neuer Messungen.

Glas	alte Bezeichn.	E	E'	E''	σ	σ'
F 3	0118/2106	5579	5389	—	0,229	0,222
SF 2	0102/1571	5641	5467	5461	0,204	0,224
LF 1	0154/2154	6235	6106[49])	6097	0,217	0,222
BK 3	0802/1450	7579	7296	7563	0,195	0,197
BaK 1	0211/1973	7476	—	7416	0,248	0,252
BK 1	0144/2175	7576	—	7461	0,208	0,210
SK 1	01209/1299	7913	7952	7992	0,262	0,271
SK 5	2122	8344	—	—	0,248	0,256

Wenn die Uebereinstimmung in manchen Fällen schlechter ist, als man erwarten sollte, so muß man bedenken, daß weder die Glassorte, noch vor allem ihre elastischen Eigenschaften wegen des Einflusses von Vorbehandlung usw. exakt reproduzierbar sind, welche beiden Tatsachen am besten darin zum Ausdruck kommen, daß die Messungen verschiedener Beobachter stets ziemlich stark differieren, selbst wenn sie nach der gleichen Methode erhalten worden sind.

Außerdem scheinen die Ergebnisse dynamischer Beobachtungen ganz systematisch etwas über denen statischer Messungen zu liegen. Dafür findet man schon bei Winkelmann und Schott[3]) ein Beispiel, indem der mit der Kundtschen Methode bestimmte E-Wert eines Glases ungefähr 3% über dem statisch gemessenen liegt. Das ist in der Tat auch die Größenordnung der meisten obigen Abweichungen. Die Ursache hierfür dürfte in der elastischen Nachwirkung zu suchen sein, die bei statischen Messungen stets im Sinne einer scheinbaren Erniedrigung von E wirkt, weil sie bei gleichbleibender Belastung eine zusätzliche Deformation hervorruft.

Dagegen kann man den Unterschied zwischen adiabatischen und isothermen Elastizitätskonstanten, der beim Vergleich einer dynamischen mit einer statischen Messung prinzipiell auftritt, nicht für die obigen Differenzen verantwortlich machen; denn er dürfte nach einer überschläglichen Rechnung auf Grund der von Voigt[50]) angegebenen Formeln bestenfalls die Größe von 0,1% erreichen.

8. Erörterung der Ergebnisse.

Die Ergebnisse des vorigen Abschnittes sind anschaulich in dem μ-σ-Diagramm des Bildes 11 dargestellt. Die punktierten Linien sind Kurven gleichen Elastizitätsmoduls; wie man aus der Beziehung $2\mu(1+\sigma) = E = \text{konst.}$ erkennt, also Teile von Hyperbeln. Die Werte von μ und E liegen mit ihrer ziemlich beträchtlichen Schwankung von 2092 kg/mm² bis 3591 kg/mm² bzw. von 5211 kg/mm² bis 9151 kg/mm² zwi-

[49]) Nach E. Wandersleb[12]).

[50]) W. Voigt, Lehrb. d. Kristallphysik, Leipzig 1910, Verlag Teubner, S. 788 u. a.

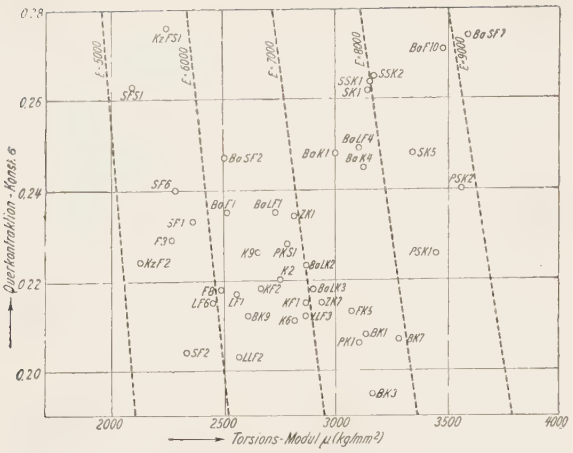

Bild 11. Graphische Darstellung der Versuchsergebnisse.

schen den entsprechenden Moduln etwa von Zinn (μ = 1700 kg/mm²; E = 4000 bis 5500 kg/mm²) und Messing (μ = 2700 bis 3700 kg/mm²; E = 8000 bis 10 000 kg/mm²), während die Werte von σ mit 0,195 bis 0,276 erheblich unter denen der meisten Metalle liegen. Die σ-Werte bleiben, wie die Theorie es auch fordert, alle zwischen 0 und ½. Man erkennt ferner auch hier wieder, daß σ durchaus keine Konstante ist, vielmehr selbst bei ein und demselben Werkstoff „Glas" ziemlich stark variiert. Diese alte Streitfrage zwischen „Rarikonstanten-" und „Multikonstantentheorie" ist heute freilich längst entschieden, während sie ursprünglich einen wesentlichen Anlaß für systematische σ-Bestimmungen bildete.

Die naheliegende Frage nach einem Zusammenhang mit der chemischen Zusammensetzung konnte leider nicht untersucht werden, da nur qualitative Angaben über die Bestandteile vorlagen. Immerhin ergibt sich schon eine interessante Gruppenbildung, wenn man die elastischen Konstanten in Abhängigkeit von der Dichte ϱ aufträgt. Das ist in den Bildern 12, 13, 14 geschehen. Besonders auffällig ist das nahezu lineare Ansteigen von σ mit der Dichte in Bild 12. Es treten offensichtlich drei

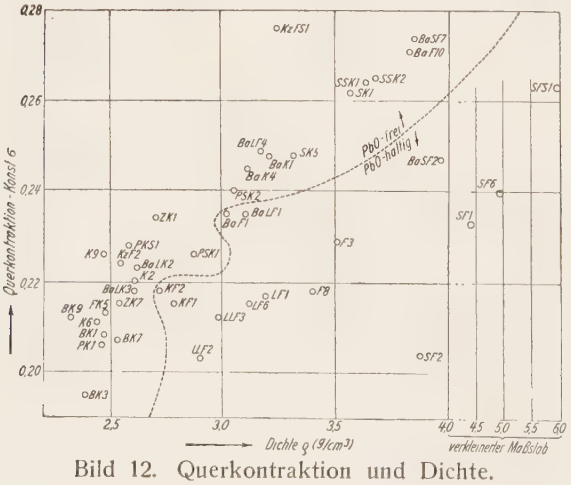

Bild 12. Querkontraktion und Dichte.

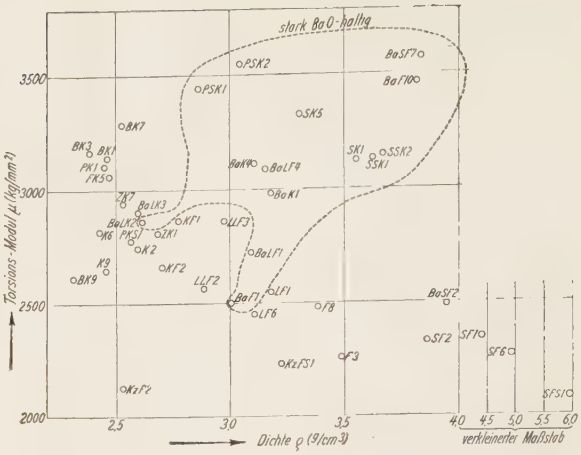

Bild 13. Torsionsmodul und Dichte.

fast parallel angeordnete Gruppen hervor[51]), in denen sich σ etwa darstellen läßt als

$$\sigma_{\mathrm{I}} = 0{,}111 + 0{,}043 \cdot \varrho$$
$$\sigma_{\mathrm{II}} = 0{,}095 + 0{,}039 \cdot \varrho$$
$$\sigma_{\mathrm{III}} = 0{,}098 + 0{,}028 \cdot \varrho$$

Der Versuch, charakteristische Merkmale der 3 Glasgruppen aufzufinden, scheitert natürlich an der Unkenntnis der Zusammensetzung. Vielleicht ist aber der Bleigehalt maßgebend; denn die Gläser der ersten, linken, Gruppe sind fast sämtlich bleifrei, die der mittleren Gruppe Flinte, d. h. bleihaltige, die der letzten Gruppe endlich ausgesprochen schwere Bleigläser. Bemerkenswert ist noch, daß die oberen Glieder der ersten Gruppe sämtlich viel BaO enthalten. Die entsprechenden Diagramme für μ und E zeigen umgekehrt im großen und ganzen ein Absinken mit der Dichte. Auffallend ist die Tatsache, daß die Gläser, die offensichtlich weit außerhalb dieser allgemeinen Linie liegen, sämtlich stark barythaltig sind. Mehr wird man ohne genauere

[51]) Die lineare Anordnung der Reihe SF2, SF1, SF6, SFS1 ist in Bild 12 wegen des an der rechten Seite verkleinerten Maßstabes nicht deutlich zu erkennen.

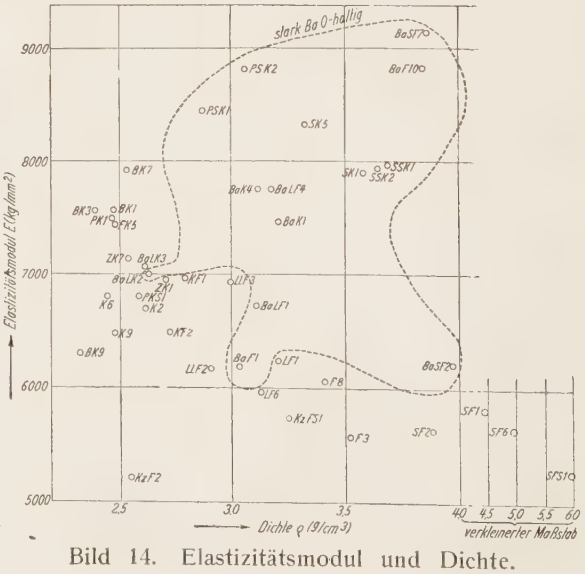

Bild 14. Elastizitätsmodul und Dichte.

Unterlagen über derartige Zusammenhänge kaum aussagen können.

9. Zusammenfassung.

Es werden nach der von Schaefer und Bergmann[52]) auf durchsichtige Körper angewandten optischen Methode die elastischen Konstanten von 42 Jenaer Gläsern gemessen. Die Beugungsfigur, die der hochfrequent schwingende Glaswürfel bei der Durchstrahlung liefert, besteht aus zwei konzentrischen Kreisen, deren äußerer von der transversalen, deren innerer von der longitudinalen elastischen Welle herrührt. Das Verhältnis der beiden Radien liefert direkt den Querkontraktionskoeffizienten σ, während zur Berechnung von Torsions- und Elastizitätsmodul, μ bzw. E, noch die Kenntnis der Dichte, der Anregungsfrequenz und der Apparaturkonstanten notwendig ist. Letztere lassen sich auf zwei verschiedenen Wegen bestimmen, deren Ergebnisse gut übereinstimmen.

Es wird die Genauigkeit der Messungen erörtert mit dem Ergebnis, daß man mit Fehlern von rund $\pm$ 1% der angegebenen Werte rechnen muß.

[52]) Cl. Schaefer u. L. Bergmann, Sitz.-Ber. Berl. Akad., 1934, S. 192; Naturw., **22** (1934), S. 685.

Ein Zusammenhang der elastischen Konstanten mit der chemischen Zusammensetzung konnte mangels geeigneter Unterlagen nicht untersucht werden; eine Beziehung zwischen Elastizität und Dichte scheint jedoch vorhanden zu sein, indem σ mit der Dichte eine steigende, E und μ eine fallende Tendenz zeigen.

Die besonderen Vorteile des neuen Verfahrens sind im wesentlichen:

1. Das Fehlen von Nachwirkungserscheinungen, da es sich um eine dynamische Methode handelt.
2. Die Möglichkeit, in einer einzigen Messung sofort ein in sich geschlossenes System der elastischen Konstanten zu erhalten.
3. Die außerordentliche Schnelligkeit der Untersuchung, da die Messung an der fertigen Apparatur nur sehr wenig Justierarbeit erfordert.

Nachwort bei der Drucklegung: Ueber die Bestimmung der elastischen Konstanten einer weiteren Anzahl von Gläsern sowie über den Zusammenhang dieser Konstanten mit der Glaszusammensetzung soll gelegentlich an dieser Stelle berichtet werden.

(11 545)

Lebenslauf.

Am 25. Februar 1913 bin ich, Hans Joachim Goehlich, als Sohn des Bankdirektors Georg Goehlich und seiner Ehefrau Clara, geb. Hoffmann, in Breslau geboren. Ich bin arischer Abstammung, deutscher Staatsangehörigkeit und evangelischen Bekenntnisses. Nach dem Besuch einer dreiklassigen Privatvorschule trat ich Ostern 1922 in das Gymnasium zu St. Maria-Magdalena in Breslau ein, dessen humanistischen Ausbildungsgang ich durchlief, und legte dort Ostern 1931 die Reifeprüfung ab. Im Sommersemester 1931 immatrikulierte ich mich an der Universität Breslau, um Physik, Mathematik und Chemie zu studieren. Im Sommersemester 1932 siedelte ich für zwei Semester nach der Universität München über, von wo ich im Sommersemester 1933 wieder nach Breslau zurückkehrte. Vom Wintersemester 1934/35 ab arbeitete ich im Physikalischen Institut der Universität Breslau an der vorliegenden experimentellen Doktorarbeit.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Arndt, Bergmann, Biltz, Gerlach, Hahn, Hönigschmidt, Hönigswald, Ludloff, Meyer, Perron, Rademacher, Radon, Reiche, Saurbier, Schaeder, Schaefer, Senftleben, Sommerfeld, Steubing, Straßmann, Weinstein, Wieland. Ihnen allen möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Dem Direktor des Breslauer Physikalischen Institutes, Herrn Professor Dr. Clemens Schaefer, der mir in großzügiger Weise die Mittel seines Institutes zur Verfügung gestellt und meine Arbeit durch sein wohlwollendes, persönliches Interesse immer wieder gefördert hat, fühle ich mich zu allergrößtem Dank verpflichtet.

Weiter gilt mein besonderer Dank meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Ludwig Bergmann, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, und der mich durch seinen wertvollen Rat und seine warme persönliche Anteilnahme in jeder Weise unterstützt hat.

Schließlich sei mir gestattet, an dieser Stelle auch der Helmholtz-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften meinen Dank auszusprechen, die Mittel zu Beschaffung eines Satzes von Piezoquarzen sowie zum Bau eines Präzisionswellenmessers zur Verfügung gestellt hat.